Следствие 1. *Если справедливо условие* (3), *то система* (1) *в случае* (2) *имеет не более одного предельного цикла второго рода при* $\mu < 0$ *и имеет не более трех предельных цикла второго рода при* $\mu > 0$.

Точное число предельных циклов зависит от существования точек покоя системы (1) в области D, количество и расположение которых на оси $O\varphi$ определяется из уравнения $h_0(\varphi, \mu) = 0$. Это уравнение при соответствующем выборе значений коэффициентов a, b, c и функции $h_3(\varphi, \mu)$ может иметь до 6 различных действительных корней или не иметь их вообще. В частности, доказан следующий результат.

Теорема 3. *Если существуют действительные числа* A *и* C, *при которых справедливы следующие условия:*

$$b = c = \mu C, \quad a = c^2\mu^2 + A^2, \quad C > 1, \quad A \gg C, \quad h_3(\varphi, \nu) > 2C^2 + 1, \tag{4}$$

то система (1) *в случае* (2) *не имеет точек покоя.*

Таким образом, получена следующая оценка числа предельных циклов.

Теорема 4 *Система* (1) *при выполнении условий* (2) – (4) *имеет единственный предельный цикл второго рода* LC *при* $\mu < 0$, *который является устойчивым* (*неустойчивым*) *в случае* $h_3(\varphi, \mu) < 0$ (> 0) *и имеет точно три простых предельных цикла второго рода* LC_1, LC_2, LC_3 *при* $\mu > 0$. *Предельные циклы* LC_1 *и* LC_3 *являются устойчивыми* (*неустойчивыми*), *а цикл* LC_2 *является неустойчивым* (*устойчивым*) *в случае* $h_3(\varphi, \mu) > > 0$ (< 0).

Литература

1. Черкас Л. А., Гринь А. А. *Функция предельных циклов второго рода для автономных ситем на цилиндре* // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 4. С. 462–470.

2. Cherkas L. A., Grin A. A., Schneider K. R. *A new approach to study limit cycles on a cylinder, Dynamics of continuous, dicrete and impulsive systems* // Series A: Mathematical Analysis. 2011. V. 18. P. 839—851.

3. Гринь А. А., Рудевич С. В. *Оценка числа предельных циклов для одного уравнения Абеля* // Весн. Гродненскага дзярж. ун-та. Сер. 2. Матэматыка. 2015. № 2(192). С. 28–35.

О СТЕПЕНИ НЕПРЕРЫВНОСТИ ИНВАРИАНТНЫХ ТОРОВ ЛИНЕЙНЫХ РАСШИРЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

И.Н. Грод

Тернопольский национальный педагогический университет, Тернополь, Украина

grod@tnpu.edu.ua

Исследованию инвариантных тороидальных многообразий динамических систем посвящено большое количество работ, в частности [1–3]. Введенное в работе [2] понятие функции Грина задачи об инвариантном торе позволило с единой точки зрения изложить теорию возмущения как дифференцируемых, так и непрерывных инвариантных многообразий и привело к необходимости изучения свойств гладкости этих функций. Изучению этого вопроса также посвящена и настоящая работа.

В теории нелинейных многочастотных колебаний возникают системы дифференциальных уравнений вида

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = A(\varphi)x + f(\varphi) \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $\varphi \in \mathcal{T}_m$ — m-мерный тор, $a(\varphi)$, $A(\varphi)$, $f(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_m)$, $C^0(\mathcal{T}_m)$ — пространство непрерывных по совокупности переменных φ- и 2π-периодических по каждой переменной φ_j, $j = \overline{1, m}$.

Обозначим также $C^q(\mathcal{T}_m)$, $q \geqslant 1$, — подпространство $C^0(\mathcal{T}_m)$ функций $F(\varphi)$, которые имеют частные производные $D^p_\varphi F(\varphi)$, $|p| = \sum_{i=1}^m p_m$, $|p| = \overline{1,q}$; $C'(\mathcal{T}_m; a)$ — подпространство $C^0(\mathcal{T}_m)$ функций $F(\varphi)$ таких, что суперпозиция $F(\varphi_t(\varphi))$ как функция переменной t непрерывно дифференцируемая по t , при этом $dF(\varphi_t(\varphi))/dt|_{t=0} := \dot{F}(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_m)$; для $(n \times n)$ $B(\varphi)$-матрицы $\|B\|_0 = \max\limits_{\varphi \in \mathcal{T}_m} \|B(\varphi)\|$, $\|B\| = \max\limits_{\|x\|=1} \|Bx\|$, $\|y\| = \langle y, y\rangle$, $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$.

Функцией Грина задачи об инвариантных торах [2] соответствующей (1) однородной системы

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = A(\varphi)x \tag{2}$$

называют функцию вида

$$G_0(\tau, \varphi) = \begin{cases} \Omega^0_\tau(\varphi) C(\varphi_\tau(\varphi)), & \tau \leqslant 0, \\ \Omega^0_\tau(\varphi)[C(\varphi_\tau(\varphi)) - I_n], & \tau > 0, \end{cases} \tag{3}$$

где $\varphi_t(\varphi)$ — решение задачи Коши $d\varphi/dt = a(\varphi)$, $\varphi|_{t=0} = \varphi$; $\Omega^t_\tau(\varphi)$ — фундаментальная матрица решений линейной системы $dx/dt = A(\varphi_t(\varphi))x$, $\Omega^t_\tau(\varphi)|_{t=\tau} = I_n$, если существует $C(\varphi)$:

$$\|G_0(\tau, \varphi)\| \leqslant K \exp(-\gamma|\gamma|), \tag{4}$$

где положительные постоянные K, γ не зависят от $\varphi \in \mathcal{T}_m$, $\tau \in \mathbb{R}$. Существование указанной выше функции ведет к существованию инвариантного тора системы уравнений (1) для каждой вектор-функции $f(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_m)$, который может быть представлен равенством

$$x = u(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_0(\tau, \varphi) f(\varphi_\tau(\varphi))\, d\tau. \tag{5}$$

Напомним, что равенством $x = u(\varphi)$ задается инвариантный тор системы (1), если $u(\varphi) \in C'(\mathcal{T}_m; a)$ і выполняется тождество $\dot{u}(\varphi) \equiv A(\varphi)u(\varphi) + f(\varphi)$ для всіх $\varphi \in \mathcal{T}_m$.

В предположении, что система (1) имеет инвариантный тор $x = u(\varphi)$ или функцию Грина, возникает вопрос о степени непрерывности по φ этих функций в зависимости от матричной функции $A(\varphi)$ и вектор-функции $a(\varphi)$, $f(\varphi)$. Эта зависимость имеет далеко не очевидный характер. Так правые части (1) могут быть непрерывно дифференцируемы, а инвариантный тор может не удовлетворять условию Липшица по φ. Оказывается также, что функция Грина $G_0(\tau, \varphi)$ имеет немножко больший степень непрерывности нежели инвариантный тор.

Изучается характер модулей непрерывности высших производных функции Грина и инвариантного тора системы (1), даны оценки и условия их сходимости.

Теорема 1. *Пусть функции $a(\varphi)$, $A(\varphi)$ принадлежат классу $C^q(\mathcal{T}_m)$ и система (2) имеет единственную функцию Грина (3) задачи об инвариантном торе, удовлетворяющую оценке (4). Тогда при выполнении неравенства $2\gamma > \alpha q$ существуют все частные производные φ функции $G_t(\tau, \varphi)$ до порядку q включительно и имеют место оценки*

$$\|D^p_\varphi G_t(\tau, \varphi) - D^p_\varphi G_t(\tau, \overline{\varphi})\| \leqslant \exp\{-\gamma|t-\tau| + (\alpha|p| + \nu)\max\{|t|; |\tau|\}\} \times$$

$$\times (K_p J_\nu(\|\varphi - \overline{\varphi}\|) + \overline{K}_p J_\nu(A; p; \|\varphi - \overline{\varphi}\|)), \quad |p| = \overline{0, q},$$

для каждого фиксированного $\nu \in (0, 2\gamma - \alpha|p|)$, где K_p, $\overline{K}_p$ — некоторые положительные постоянные.

Теорема 2. *Если в предположениях теоремы 1 потребовать выполнения неравенства $\gamma > \alpha q$, то для любого $\nu \in (0, \gamma - a|p|)$ и для каждой фиксированной вектор-функции*

$f(\varphi) \in C^q(\mathcal{T}_m)$ существует единственный инвариантный тор $x = u(\varphi)$ системы (1) со всеми частными производными до порядка q включительно и выполняются оценки

$$\|D^p_\varphi u(\varphi)-D^p_\varphi u(\overline{\varphi})\| \leqslant N_p J_\nu(a;p;\|\varphi-\overline{\varphi}\|)+\overline{N}_p J_\nu(A;p;\|\varphi-\overline{\varphi}\|)+\overline{\overline{N}}_p J_\nu(f;p;\|\varphi-\overline{\varphi}\|), \quad |p|=\overline{0,q},$$

де N_p, $\overline{N}_p$, $\overline{\overline{N}}_p$ — положительные постояные.

Литература

1. Самойленко А. М. *Элементы математической теории многочастотных колебаний.* М.: Наука, 1987. 304 с.
2. Самойленко А. М. *О сохранении инвариантного тора при возмущении* // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1970. Т. 34, № 6. С. 1219–1240.
3. Самойленко А. М., Бурылко А. А., Грод И. Н. *Модули непрерывности производных инвариантных торов линейных расширений динамических систем* // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, № 1. С. 103–113.

К ПОСТРОЕНИЮ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ОБОБЩЕННОГО МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА С ПАРАМЕТРОМ

Л.А. Данилович[1], В.Н. Лаптинский[2]

[1] Белорусско-Российский университет, Могилев, Беларусь
[2] Институт технологии металлов НАН Беларуси, Могилев, Беларусь
lavani@tut.by

Данная работа является продолжением и развитием [1–4]. На основе применения метода [5, гл. II] получены коэффициентные достаточные условия существования и единственности ω-периодического решения уравнения

$$\frac{dX}{dt} = \lambda A(t)X(K_0 + \lambda K_1(t) + \lambda^2 K_2(t)) + \lambda^2 B(t)XC(t) + F(t), \quad X \in \mathbb{R}^{n\times m}, \tag{1}$$

где $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $F(t)$, $K_i(t)$ $(i = 1, 2)$ — непрерывные ω-периодические матрицы соответствующих размерностей, K_0 — постоянная матрица, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Примем следующие обозначения:

$$\tilde{A}(\omega)=\int_0^\omega A(\tau)\,d\tau, \quad \gamma=\|\tilde{A}^{-1}(\omega)\|, \quad \varepsilon=|\lambda|, \quad \alpha=\max_t\|A(t)\|, \quad \beta=\max_t\|B(t)\|, \quad \mu=\max_t\|C(t)\|,$$

$$\beta_0=\|K_0\|, \quad \beta_i=\max_t\|K_i(t)\|, \quad h=\max_t\|F(t)\|, \quad r=\|K_0^{-1}\|, \quad q_1=\frac{1}{2}\gamma\alpha^2\beta_0\omega^2+\gamma(\alpha\beta_1+\beta\mu)r\omega,$$

$$q_2=\frac{1}{2}\gamma\alpha(\alpha\beta_1+\beta\mu)\omega^2+\gamma\alpha\beta_2 r\omega, \quad q_3=\frac{1}{2}\gamma\alpha^2\beta_2\omega^2, \quad q=\varepsilon q_1+\varepsilon^2 q_2+\varepsilon^3 q_3, \quad H=\frac{1}{2}\gamma\alpha\omega^2 h+\frac{1}{\varepsilon}\gamma r\omega h,$$

где $t \in [0, \omega]$, $\|\cdot\|$ — согласованная норма матриц.

Теорема. *Пусть выполнены условия* $\det K_0\tilde{A}(\omega) \neq 0$, $0 < q < 1$. *Тогда ω-периодическое решение уравнения* (1) *существует и единственно. Решение $X(t,\lambda)$ представимо в виде ряда*

$$X(t,\lambda) = \sum_{k=0}^\infty \lambda^{k-1}X_{k-1}(t),$$

сходящегося равномерно по $t \in [0, \omega]$, при этом справедлива оценка $\|X(t,\lambda)\| \leqslant H/(1-q)$.

Здесь матрицы $X_{k-1}(t)$ определены рекуррентным интегральным соотношением типа [3, 4].